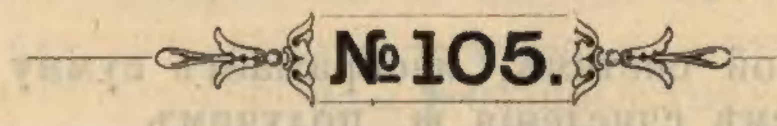
ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ И ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.



№ 105.

IX Сем. 11 Ноября 1890 г. № 9.

О СУММѢ ЦЫФРЪ

при различныхъ системахъ счисленія.

Пусть N и m будутъ какія угодно цѣлыя и положительныя числа, лишь бы N было болѣе m.

Условимся изображать знакомъ $(N)_m$ число N, написанное по системѣ счисленія m, а знакомъ $S(N)_m$—сумму цыфръ и чиселъ, изъ которыхъ будетъ состоять число N, написанное по новой системѣ счисленія. Для изображенія числа N по системѣ счисленія m надо, какъ извѣстно, дѣлить N на m, затѣмъ полученное частное снова дѣлить на m и такъ далѣе, пока не дойдемъ до такого частнаго, которое окажется менѣе m. Въ этомъ случаѣ дѣленіе окончено, послѣднее частное и всѣ остатки по порядку отъ послѣдняго до перваго изобразятъ намъ число N по системѣ счисленія m. Слѣдовательно $S(N)_m$ будетъ сумма послѣдняго частнаго и всѣхъ остатковъ, читаемая по десятичной системѣ счисленія. Если m будетъ болѣе десяти, то новыхъ знаковъ намъ не придется вводить, потому что $S(N)_m$ читается по десятичной системѣ.

Принимая во вниманіе способъ изображенія числа N по системѣ счисленія m и означая частныя и остатки соотвѣтственно черезъ

$$q_1,\ q_2,\ q_3, \ldots\ldots q_n\ (q_n \text{ пусть} < m)$$

$$r_1,\ r_2,\ r_3, \ldots\ldots r_n,$$

получимъ числовыя тождества:

$$
\begin{aligned}
N &= mq_1 + r_1 \\
q_1 &= mq_2 + r_2 \\
q_2 &= mq_3 + r_3 \qquad\qquad (1) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
q_{n-1} &= mq_n + r_n,
\end{aligned}
$$

откуда по сложенiи имѣемъ

$$N=(m-1)(q_1+q_2+q_3+\ldots+q_n)+r_1+r_2+r_3+\ldots+r_n+q_n. \quad (2)$$

Замѣчая, что сумма

$$r_1+r_2+r_3+\ldots\ldots+r_n+q_n,$$

читаемая по десятичной системѣ, изображаетъ сумму цыфръ числа N, выраженнаго по системѣ счисленiя m, получимъ

$$N=(m-1)(q_1+q_2+q_3+\ldots\ldots+q_n)+S(N)_m \quad (2)$$

или

$$N=(m-1)\left(E\frac{N}{m}+E\frac{q_1}{m}+E\frac{q_2}{m}+\ldots+E\frac{q_{n-1}}{m}\right)+S(N)_m, \quad (2)$$

если символомъ E условимся изображать наибольшее цѣлое число, заключающееся въ какой угодно дроби. Тождество (2) легко преобразовать въ болѣе простое, если принять во вниманiе тождества (1). Дѣйствительно, переписавъ тождества (1) въ видѣ

$$\frac{N}{m}=q_1+\frac{r_1}{m}$$

$$\frac{q_1}{m}=q_2+\frac{r_2}{m}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{q_{k-1}}{m}=q_k+\frac{r_k}{m} \quad (1')$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{q_{n-1}}{m}=q_n+\frac{r_n}{m},$$

вообще для какого угодно q_k имѣемъ

$$q_k=\frac{N}{m^k}-\frac{r_1+r_2m+r_3m^2+\ldots\ldots+r_km^{k-1}}{m^k}.$$

Но такъ какъ самое наибольшее значенiе каждаго изъ остатковъ $r_1, r_2, r_3, \ldots\ldots r_k$ есть $m-1$, то мы можемъ заключить, что

$$r_1+r_2m+r_3m^2+\ldots\ldots+r_km^{k-1}\leq m^k-1.$$

Слѣдовательно

$$\frac{N}{m^k}-q_k<1,$$

а также ясно, что

$$\frac{N}{m^k}-q_k \geq 0.$$

Послѣднія два условія даютъ возможность заключить, что

$$q_k = E\frac{N}{m^k},$$

и тождество (2) переписать въ видѣ

$$N=(m-1)\left(E\frac{N}{m}+E\frac{N}{m^2}+E\frac{N}{m^3}+\ldots+E\frac{N}{m^n}\right)+S(N)_m. \qquad (2')$$

или вообще

$$N=(m-1)\sum_{k=1}^{k=n} E\frac{N}{m^k}+S(N)_m, \qquad (2')$$

откуда

$$S(N)_m = N-(m-1)\sum_{n=1}^{n=n} E\frac{N}{m^n} \;.\;.\;.\;.\;.\;. (3)$$

По этой формулѣ можно вычислять сумму цыфръ какого угодно числа при различныхъ системахъ счисленія, не изображая самого числа по выбранной системѣ счисленія. Выборъ числа и основанія системы счисленія вполнѣ зависитъ отъ условія рѣшаемаго вопроса. Если въ формулѣ (3) положить $n=1$, то получимъ формулу

$$S(N)_m = N-(m-1)E\frac{N}{m}, \qquad (4)$$

данную академикомъ В. Я. Буняковскимъ (см. приложеніе къ LV тому записокъ Императорской Академіи наукъ). Не трудно убѣдиться, что формула (4) даетъ вѣрные результаты только въ томъ частномъ случаѣ, когда имѣетъ мѣсто неравенство $E\frac{N}{m}<m$.

Слѣдовательно, чтобы воспользоваться формулой (4) въ нѣкоторыхъ приложеніяхъ, надо a priori подобрать какъ число N, такъ и основаніе системы счисленія такимъ образомъ, чтобы было $E\frac{N}{m}<m$; а этотъ подборъ бываетъ совсѣмъ не возможенъ. Замѣтимъ кстати, что формулы (3) и (4) рѣшаютъ многіе вопросы теоріи чиселъ; условія же

вопроса могутъ быть таковы, что неравенство $E\frac{N}{m}<m$ не будетъ имѣть мѣста, а тогда и формула (4) будетъ не вѣрна.

Напр. Опредѣляя $S(100)_3$ и $S(78694)_{19}$ по формулѣ (4), найдемъ

$$S(100)_3=100-2.33=34$$

$$S(78694)_{19}=78694-18.4141=4156,$$

тогда какъ просто дѣленіемъ можно убѣдиться, что

$$S(100)_3=4$$

$$S(78694)_{19}=52.$$

Это неудобство формулы (4) въ приложеніи къ рѣшенію нѣкоторыхъ вопросовъ теоріи чиселъ и послужило главною причиною обобщить ее.

Вычисляя по формулѣ (3) $S(100)_3$ и $S(78694)_{19}$, найдемъ

$$S(100)_3=100-2(33+11+3+1)=4$$

$$S(78694)_{19}=78694-18(4141+217+11)=52.$$

Оставляя въ сторонѣ рѣшеніе при помощи формулы (3) вопросовъ теоріи чиселъ, покажемъ приложеніе ея къ повѣркѣ ариѳметическихъ дѣйствій.

Если въ формулѣ (3) положимъ $m=10$, а число цыфръ N означимъ черезъ p, то сумма цыфръ всякаго числа N при десятичной системѣ счисленія выразится формулой

$$S(N)_{10}=N-9\sum_{n=1}^{n=p-1}E\frac{N}{10^n}. \qquad (5)$$

Полагая, что ариѳметическія операціи производятся надъ числами, состоящими не болѣе какъ изъ ста цыфръ (тогда какъ на самомъ дѣлѣ числа беремъ гораздо меньшія), легко видѣть, что $S(N)_{10}$ будетъ изображать собою или однозначное, или двузначное, или трехзначное числа. Не трудно также видѣть, что отъ примѣненія формулы (5) къ числу N, затѣмъ къ $S(N)_{10}$, затѣмъ къ $S[S(N)_{10}]$ и т. д. въ окончательномъ результатѣ всегда получимъ обязательно однозначное число.

Дѣйствительно, полагая

$$S_1(N)_{10}=100a+10b+c$$

и примѣняя формулу (5) снова, получимъ

$$S_2[S_1(N)_{10}]=S_2(100a+10b+c)=100a+10b+c-9[(10a+b)+a]=$$
$$=a+b+c=10d+e(\text{если } a+b+c>10)$$

и наконецъ

$$S_3[S_2\{S_1(N)_{10}\}]=S_3(10d+e)=d+e.$$

Если $d+e<10$, то окончательный результатъ число однозначное; если же $d+e>10$, то снова примѣняемъ формулу (5) и тогда получимъ однозначное число. Замѣчая это, не трудно убѣдиться, что отъ примѣненія формулы (5) нѣсколько разъ къ числамъ вида $9n$, и $a+9n$, гдѣ a число однозначное, а n какое угодно цѣлое положительное, получимъ въ окончательномъ результатѣ въ первомъ случаѣ 9, а во второмъ—a.

Дѣйствительно,

$$S(n.9)_{10}=9n-9(n-\alpha)=9\alpha, \text{ гдѣ } \alpha<n.$$

$$S(9\alpha)_{10}=9\alpha-9(\alpha-\beta)=9\beta, \text{ гдѣ } \beta<\alpha$$

и т. д.

$$S(3.9)_{10}=3.9-2.9=9$$

и

$$S(2.9)_{10}=2.9-1.9=9,$$

а также

$$S(a+n.9)_{10}=a+n.9-9\alpha=a+9\beta, \text{ гдѣ } \beta<n,$$

$$S(a+9\beta)_{10}=a+9\gamma, \text{ гдѣ } \gamma<\beta,$$

и т. д.

$$S(a+2.9)_{10}=a, \text{ если } a>1,$$

$$S(a+2.9)_{10}=a+9, \text{ если } a=1,$$

$$S(a+9)_{10}=a.$$

Эти два замѣчанія даютъ возможность высказать слѣдующее:

1) Всѣ числа можно разсматривать въ видѣ девяти ариѳметическихъ прогрессій, у которыхъ первые члены суть: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9, разность 9, а сумма цыфръ какого угодно члена какой угодно прогрессіи равна первому члену.

(2) $S(a_1+n_1.9)(S(a_2+n_2.9)\ldots\ldots S(a_m+n_m.9)=S(a_1a_2\ldots a_m).$

(3) $$S(a+n.9)^k=S(a)^k.$$

(4) $$S(n.9)^k=9.$$

Условимся, поэтому, подъ суммою цыфръ какого угодно числа при десятичной системѣ счисленія подразумѣвать то однозначное число, которое обязательно получится отъ примѣненія нѣсколько разъ формулы (5) и покажемъ, какъ при этомъ условіи повѣрить четыре ариѳметическія дѣйствія.

1. *Сложеніе.* Дано сложить числа

$$(10^n a_1+10^{n-1}a_2+\ldots\ldots+10a_{k-1}+a_k)+(10^n b_1+10^{n-1}b_2+\ldots\ldots+10b_{k-1}+b_k)+$$
$$+(10^n c_1+10^{n-1}c_2+\ldots\ldots+10c_{k-1}+c_k)+(10^n d_1+10^{n-1}d_2+\ldots\ldots+10d_{k-1}+d_k)$$

и въ суммѣ получилось

$$10^n(a_1+b_1+c_1+d_1)+10^{n-1}(a_2+b_2+c_2+d_2)+\ldots\ldots+$$
$$+10(a_{k-1}+b_{k-1}+c_{k-1}+d_{k-1})+(a_k+b_k+c_k+d_k)$$

Пусть

$$S(10^n a_1+10^{n-1}a_2+\ldots\ldots+10a_{k-1}+a_k)_{10}=a_1+a_2+\ldots\ldots+a_{k-1}+a_k=\alpha$$

(полученное извѣстнымъ способомъ)

$$S(10^n b_1+10^{n-1}b_2+\ldots\ldots+10b_{k-1}b_k)_{10}=b_1+b_2+\ldots\ldots+b_{k-1}b_k=\beta$$

$$S(10^n c_1+10^{n-1}c_2+\ldots\ldots+10c_{k-1}+c_k)_{10}=c_1+c_2+\ldots\ldots+c_{k-1}+c_k=\gamma$$

$$S(10^n d_1+10^{n-1}d_2+\ldots\ldots+10d_{k-1}+d_k)_{10}=d_1+d_2+\ldots\ldots+d_{k-1}+d_k=\delta,$$

тогда, если сложеніе сдѣлано вѣрно, то должно имѣть мѣсто

$$S[10^n(a_1+b_1+c_1+d_1)+10^{n-1}(a_2+b_2+c_2+d_2)+\ldots\ldots+$$
$$+10(a_{k-1}+b_{k-1}+c_{k-1}+d_{k-1})+(a_k+b_k+c_k+d_k)]_{10}=\alpha+\beta+\gamma+\delta,$$

что и есть на самомъ дѣлѣ.

Примѣръ.

	Однозначныя.	
7834892	5	Сумма ихъ **3**.
5947658	8	
6487965	9	
18678548	2	
22314876	6	
61263939	**3**.	

2. *Умноженіе.*

Пусть $A.B=C$, гдѣ A, B и C суть цѣлыя положительныя. Если

$$S(A)_{10}=a$$

$$S(B)_{10}=b,$$

гдѣ a и b однозначныя, извѣстнымъ образомъ полученныя, то, на основаніи предыдущаго, легко убѣдиться, что

$$S(C)_{10}=S(ab)_{10}.$$

Замѣтимъ однако, что правило повѣрки умноженія можно вывести и непосредственно.

Примѣръ.

		Однозначныя.	
	85674326	5	S(5.4)=2.
	× 7852	4	
Произведеніе	672714807752	2.	

3. *Вычитаніе.*

Пусть A—B=C, тогда ясно, что

$$S(A)_{10}=S[S(B)_{10}+S(C)_{10}]_{10},$$

гдѣ опять подъ знакомъ суммы подразумѣваемъ однозначное.

Примѣръ.

	Однозначныя.	
5876203472	8	
— 3456786548	2	2+6=8.
2419416924	6	

4. *Дѣленіе.*

Пусть при дѣленіи чиселъ A и B получается въ частномъ C, а въ остаткѣ D, тогда ясно, что

$$S(A)_{10}=S[S(BC)_{10}+S(D)_{10}]_{10},$$

гдѣ сумма находится извѣстнымъ образомъ

Примѣръ.

		Однозначныя.	
Дѣлимое	765678457............	1	
Дѣлитель.	64326............	3	S(3.5)=6.
Частное	11903............	5	
Остатокъ.	6079............	4	S(4+6)=1.

Правила повѣрки вычитанія и дѣленія также можно вывести непосредственно.

При повѣркѣ дѣйствій, а также и при другихъ операціяхъ ариѳметики, напр. съ простыми и десятичными дробями, а также и съ степенями различныхъ чиселъ, нѣтъ, конечно, необходимости всякій разъ вычислять сумму цыфръ по формулѣ (5), такъ какъ простымъ разсужденіемъ легко убѣдиться, что сумма цыфръ какого угодно числа всегда одна и та-же, будемъ ли вычислять ее по формулѣ (5) или непосредственно. Этотъ послѣдній способъ вычисленія, какъ слѣдствіе формулы (5), на практикѣ очень простъ и значительно упрощается, если на кратность 9 при счетѣ не будемъ обращать вниманія въ силу доказаннаго равенства

$$S(a+n.9)_{10}=S(a)_{10}.$$

Напр.

$$S(2419416924)=S(2+4+1+4+1+6+2+4)=S(24)=6.$$

Равенство

$$S(a+n.9)_{10}=S(a)_{10}$$

даетъ право заключить, что изложенный способъ повѣрки дѣйствій сходенъ съ способомъ повѣрки черезъ цыфру 9; оба эти способа повѣрки были, если не ошибаемся, извѣстны въ концѣ среднихъ вѣковъ. Мы, понятно, не придаемъ большого значенія примѣненіямъ формулъ (3) и (5) къ рѣшенію вопроса о повѣркѣ дѣйствій, однако сочли необходимымъ указать на эти формулы потому, что онѣ, рѣшая въ частномъ случаѣ нѣкоторые вопросы ариѳметики, дадутъ намъ средство значительно упростить вычисленія при изслѣдованіи въ области теоріи чиселъ.

Н. А. Сорокинъ (Кіевъ).

УЧЕНІЕ О КРУГѢ,

изложенное независимо отъ понятія о предѣлѣ.

Пусть AB (фиг. 20) означаетъ сторону правильнаго n-угольника, вписаннаго въ кругъ, радіусъ котораго R. Опустивъ изъ центра O перпендикуляръ на AB и проведя черезъ точку пересѣченія этого перпендикуляра съ кругомъ касательную $A'C'B'$, найдемъ, что часть этой касательной $A'B'$, заключенная между продолженіями радіусовъ OA и OB, есть сторона правильнаго описаннаго n-угольника. Изъ подобія треугольниковъ AOB и $A'OB'$ выводимъ

Фиг. 20.

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{OC}{OC'}$$

или

$$\frac{nA'B'-nAB}{nA'B'}=\frac{OC'-OC}{OC'}.$$

Пусть периметръ описаннаго n-угольника будетъ P, а периметръ вписаннаго p; тогда

$$\frac{P-p}{P}=\frac{CC'}{R},$$

CC' означаетъ катетъ прямоугольнаго треугольника CC'A; поэтому $CC'<AC'$. Хорда AC' меньше дуги AC', а эта послѣдняя представляетъ собою $2n$-ую долю окружности. Поэтому, означая черезъ K длину окружности, найдемъ

$$CC'<\frac{K}{2n}.$$

Поставивъ сюда на мѣсто CC' его значеніе изъ предыдущей пропорціи, получимъ

$$(P-p)\frac{R}{P}<\frac{K}{2n},$$

откуда

$$0<P-p<\frac{KP}{2nR}.$$

Раздѣливъ каждую часть на 2R, найдемъ

$$0<\frac{P}{2R}-\frac{p}{2R}<\frac{KP}{4nR^2}.$$

Изъ всѣхъ многоугольниковъ описанныхъ около круга наибольшій периметръ принадлежитъ треугольнику и выражается формулой $6R\sqrt{3}$. Слѣдовательно

$$P<6R\sqrt{3} \quad \text{и} \quad K<6R\sqrt{3}.$$

Перемноживъ это, найдемъ

$$PK<(6R\sqrt{3})^2 \quad \text{или} \quad \frac{PK}{4R^2}<27$$

и вслѣдствіе этого будемъ имѣть

$$0<\frac{P}{2R}-\frac{p}{2R}<\frac{27}{n}. \qquad (1)$$

Поставивъ сюда K на мѣсто p и замѣтивъ, что

$$P>K>p,$$

мы не нарушимъ предыдущаго неравенства и получимъ

$$0<\frac{P}{2R}-\frac{K}{2R}<\frac{27}{n}. \qquad (2)$$

Совершенно такимъ же образомъ для другого круга, длина окружности котораго K′, радіусъ R′, а периметръ описаннаго n-угольника P′, будемъ имѣть

$$0<\frac{P'}{2R'}-\frac{K'}{2R'}<\frac{27}{n}.$$

Это неравенство можно представить въ видѣ

$$-\frac{27}{n}<\frac{K'}{2R'}-\frac{P'}{2R'}<0.$$

Сложивъ это неравенство съ неравенствомъ (2) и замѣтивъ, что периметры одноименныхъ правильныхъ многоугольниковъ пропорціональны ихъ апоѳемамъ, именно

$$\frac{P}{R}=\frac{P'}{R'},$$

получимъ

$$-\frac{27}{n}<\frac{K'}{2R'}-\frac{K}{2R}<\frac{27}{n}. \qquad (3)$$

Неравенство (1) можно представить въ видѣ

$$0<\frac{\frac{PR}{2}}{R^2}-\frac{\frac{pR}{2}}{R^2}<\frac{27}{n}. \qquad (4)$$

Первая изъ формулъ $\frac{PR}{2}$ и $\frac{pR}{2}$ выражаетъ собою площадь описаннаго n-угольника, а вторая площадь вписаннаго $2n$-угольника, какъ это видно изъ равенства

$$\frac{pR}{2}=n\left(\frac{AB.OC}{2}+\frac{AB.CC'}{2}\right).$$

Если означимъ черезъ L площадь круга радіуса R, то будемъ имѣть

$$\frac{PR}{2}>L>\frac{pR}{2}.$$

Отсюда видно, что неравенство (4) не нарушится отъ замѣны $\frac{pR}{2}$ черезъ L и перейдетъ въ такое

$$0<\frac{\frac{PR}{2}}{R^2}-\frac{L}{R^2}<\frac{27}{n}.$$

Это неравенство можно представить въ видѣ

$$-\frac{27}{n}<\frac{L}{R^2}-\frac{P}{2R}<0.$$

Сложивъ это неравенство съ неравенствомъ (2), получимъ

$$-\frac{27}{n}<\frac{L}{R^2}-\frac{K}{2R}<\frac{27}{n}. \qquad (5)$$

Посредствомъ неравенствъ (3) и (5) легко доказать основныя теоремы о кругѣ.

Теорема 1. Отношеніе окружности къ діаметру есть величина постоянная.

Для доказательства этой теоремы надо обнаружить справедливость равенства

$$\frac{K}{2R}=\frac{K'}{2R'}.$$

Употребимъ пріемъ reductio ad absurdum. Пусть, если возможно, отношеніе $\frac{K}{2R}$ не равно отношенію $\frac{K'}{2R'}$, но меньше его. Тогда

$$\frac{K'}{2R'}-\frac{K}{2R}=a$$

гдѣ a положительное число. Въ формулѣ (3) n означаетъ совершенно произвольное цѣлое число большее 3. Поэтому подъ n можно разумѣть число большее частнаго полученнаго отъ дѣленія 27 на a. Итакъ пусть будетъ

$$n>\frac{27}{a}.$$

Замѣнивъ въ неравенствѣ (3) разность $\frac{K'}{2R'}-\frac{K}{2R}$ черезъ a, получимъ

$$-\frac{27}{n}<a<\frac{27}{n}$$

откуда

$$n<\frac{27}{a}.$$

Неравенства

$$n>\frac{27}{a} \text{ и } n<\frac{27}{a}$$

противорѣчатъ одно другому, а потому допущеніе, будто отношеніе $\frac{K}{2R}$ меньше отношенія $\frac{K'}{2R'}$, не состоятельно. Допустимъ теперь, если возможно, что отношеніе $\frac{K}{2R}$ больше отношенія $\frac{K'}{2R'}$; тогда

$$\frac{K}{2R}-\frac{K'}{2R'}=b \quad \text{или} \quad \frac{K'}{2R'}-\frac{K}{2R}=-b$$

гдѣ $b>0$. Пусть n означаетъ цѣлое число большее частнаго, полученнаго отъ дѣленія 27 на b; именно

$$n>\frac{27}{b}.$$

Неравенство (3) по замѣнѣ разности $\frac{K'}{2R'}-\frac{K}{2R}$ черезъ $-b$ приводится къ виду

$$-\frac{27}{n}<-b<\frac{27}{n}$$

и доставляетъ

$$n<\frac{27}{b}.$$

Неравенства

$$n>\frac{27}{b} \quad \text{и} \quad n<\frac{27}{b}$$

противорѣчатъ одно другому, а потому и допущеніе, будто отношеніе $\frac{K}{2R}$ больше отношенія $\frac{K'}{2R'}$, не состоятельно.

Убѣдившись, что отношеніе $\frac{K}{2R}$ не больше отношенія $\frac{K'}{2R'}$ и не меньше его, заключаемъ, что оно равно ему, именно

$$\frac{K}{2R}=\frac{K'}{2R'},$$

а это и нужно было доказать.

Теорема 2. Площадь круга равна длинѣ окружности, умноженной на половину радіуса.

Для доказательства этой теоремы надо обнаружить справедливость равенства

$$L=\frac{KR}{2} \quad \text{или} \quad \frac{L}{R^2}=\frac{K}{2R}.$$

Опять употребимъ пріемъ reductio ad absurdum. Пусть, если воз-

можно, разность $\frac{L}{R^2}-\frac{K}{2R}$ не равна нулю и пусть абсолютное значенie ея будетъ a. Тогда неравенство (5) дастъ

$$a<\frac{27}{n} \quad \text{откуда} \quad n<\frac{27}{a}.$$

Съ другой стороны подъ n можно разумѣть произвольное цѣлое число, а потому и число большее $\frac{27}{a}$, именно

$$n>\frac{27}{a}.$$

Это неравенство противорѣчитъ предыдущему, а потому допущенie, будто разность

$$\frac{L}{R^2}-\frac{K}{2R}$$

не равна нулю, не состоятельно.

А это и нужно было доказать.

Учитель Тамбовскаго реальнаго училища
П. С. Флоровъ (Тамбовъ).

Отчеты о засѣданiяхъ ученыхъ обществъ.

Кiевск. Физ.-Мат. Общ. 14-ое очер. засѣданie 22-го ноября. Предсѣд. проф. Н. Н. Шиллеръ; присутств. 35 чл. Были сдѣланы сообщенiя:

1) *В. П. Ермаковъ:* „О начальномъ преподаванiи алгебры" *).

2) *Н. Ф Хруцкiй*: „Электродинамическiя уравненiя Герца" (спецiальный рефератъ).

3) *Н. Н. Шиллеръ*: „Возбужденie индуктивныхъ токовъ вращенiемъ поляризованнаго луча" (рефератъ объ опытахъ Самуила Шельдона) **).

Кiевское Физ.-Мат. Общество 15-ое очередное засѣданie 7-го декабря. Предсѣдательствовалъ проф. Н. Н. Шиллеръ; присутствовало 34 чл. Были сдѣланы сообщенiя:

1) *М. Ѳ. Хандриковъ*: „О преимуществахъ кольцевого микрометра по сравненiю съ крестообразнымъ".

2) А. *Н. Сорокинъ*: „О числахъ подобныхъ совершеннымъ".

3) *Н. Ф. Хруцкiй*: „Электродинамическiя уравненiя Герца" (продолженie).

Была избрана ревизiонная коммисiя изъ гг. членовъ: В. И. Заiончевскаго, В В. Игнатовичъ-Завилейскаго и А. Л. Королькова.

---

*) См. № 102 „Вѣстника" стр 101.

**) Краткое описанie интересныхъ опытовъ Шельдона откладываемъ до того времени, когда будутъ окончены повѣрочные опыты, предпринятые въ Кiевской Физ. лабораторiи.

Заявилъ желаніе поступить въ число дѣйств. членовъ присутствовавшій въ качествѣ гостя профессоръ Кіевскаго Университета И. И. Броуновъ.

Кіевск. Физ.-Мат. Общ. 16-ое очер. засѣданіе 13-го декабря. Предсѣд. проф. Н. Н. Шиллеръ; присутств. 26 чл.

1) *Н. Н. Шиллеръ* демонстрировалъ: *a*) гальванометръ Д'Арсонваля, описалъ его устройство и показалъ на опытѣ его чувствительность и быстрое успокаиваніе колебаній. *b*) Была установлена такая комбинація микрофона, телефона и гальв. элемента, при которой звукъ продолжается самъ собою неопредѣленно долгое время (такъ называемое „акустическое perpetuum mobile") *) *c*) Опытъ Гельмгольца воспроизведенія гласныхъ *а*, *о*, *у* посредствомъ камертоновъ, приводимыхъ въ колебаніе гальв. токомъ.

Затѣмъ были сдѣланы сообщенія.

2) *К. Н. Жукъ*: „О температурѣ воды Днѣпра" **).

3) *Я. П. Мишинъ*: „О наглядномъ объясненіи ариѳметическихъ дѣйствій по способу Масе".

РАЗНЫЯ ИЗВѢСТІЯ.

Пятый отдѣлъ Императорскаго Русскаго Техническаго Общества устраиваетъ въ С.-Петербургѣ, въ мартѣ 1891 года, Всероссійскую фотографическую выставку съ цѣлью представить современное состояніе свѣтописи (фотографіи). Независимо отъ обычной выставки фотографическихъ работъ, предположено собрать систематическія коллекціи, могущія наглядно ознакомить публику съ различными фотографическими процессами и ихъ приложеніями, для чего въ опредѣленные часы предполагается демонстрированіе ихъ и объясненіе. Кромѣ того, проектируются во время выставки публичныя чтенія по разнымъ отраслямъ свѣтописи.

Распорядительный комитетъ выставки приглашаетъ къ участію въ ней всѣ русскія правительственныя, общественныя, частныя и фабричныя учрежденія, пользующіяся фотографіею для разныхъ цѣлей, а также приглашаетъ профессіональныхъ фотографовъ и всѣхъ любителей, занимающихся фотографіею.

На выставку будетъ приниматься все, касающееся фотографіи и ея примѣненій, а именно: сочиненія по фотографіи, портреты, снимки съ природы, фотографіи внѣшности или внутренности зданій; художественныя композиціи, исполненныя при посредствѣ фотографіи; разнородные мгновенные снимки; увеличенныя копіи; фотографіи, снятыя при разныхъ видахъ искусственнаго свѣта; примѣненіе свѣтописи въ различныхъ отрасляхъ науки и техники; діапозитивы съ примѣненіемъ ихъ къ оптическимъ фонарямъ и стереоскопамъ; фотографіи на фарфорѣ, шелку, целлюлоидѣ, холстѣ, деревѣ, кости и желѣзѣ; примѣненіе фотографіи къ печатному дѣлу; затѣмъ всякія принадлежности къ фотографическимъ процессамъ—какъ то: объективы, фотометры, камеры, штативы, затворы, предметы фотографической обстановки, хими-

---

*) Въ одномъ изъ будущихъ засѣданій Общества Э. К. Шпачинскій обѣщалъ демонстрировать этотъ опытъ въ нѣсколько измѣненномъ видѣ; тогда онъ и будетъ описанъ подробно въ „Вѣстникѣ".

**) Будетъ напечатано полностью въ „Запискахъ Кіевскаго Общества Естествоиспытателей".

ческіе матеріалы, свѣточувствительныя пластинки, бумага и пленки; картоны и различные способы и матеріалы для улучшенія отпечатковъ.

За особо выдающіяся работы будутъ присуждены награды экспертной коммиссіей, избранной общимъ собраніемъ V отдѣла Императорскаго Русскаго Техническаго Общества.

Распорядительный Комитетъ разсылаетъ къ извѣстнымъ ему дѣятелямъ по свѣтописи приглашенія съ приложеніемъ правилъ къ участію на выставкѣ 1891 г.

Конечно, многія лица, занимающіяся фотографіею въ Россіи, въ качествѣ профессіоналовъ и любителей, не получатъ приглашенія по неизвѣстности ихъ мѣстожительства; но лица эти, если пожелаютъ принять участіе въ выставкѣ, могутъ письменно обратиться въ Распорядительный Комитетъ фотографической выставки, по адресу: (*С.-Петербургъ, Пантелеймоновская улица № 2*). Комитетъ немедленно вышлетъ имъ „Положеніе“ и „Правила“ о выставкѣ, а также накладныя.

Существовавшая въ теченіе десяти лѣтъ (1880—1890) „Секція Физико-Математическихъ Наукъ Общества Естествоиспытателей при Императорскомъ Казанскомъ Университетѣ“ преобразована въ текущемъ году въ особое **„Физико-Математическое Общество при Императорскомъ Казанскомъ Университетѣ“**. Всѣ бывшіе члены „Секціи“ *) зачислены въ дѣйствительные члены „Физ.-Мат. Общества“ безъ избранія, какъ учредители. Уставъ новаго Общества утвержденъ Г. Министромъ Нар. Просв. 16-го іюня 1890 г.—Намъ пріятно отмѣтить, что, согласно § 1 Устава, Казанское Физ.-Мат. Общество задалось цѣлью не только „содѣйствовать успѣхамъ физико-математическихъ наукъ“, но также и „улучшенію методовъ ихъ преподаванія и распространенію физико-математическихъ знаній въ предѣлахъ Восточной Россіи“. Съ этою цѣлью Общество приступаетъ къ изданію своего спеціальнаго журнала **„Извѣстія“** и пр. **), которому отъ души желаемъ успѣха и популярности. Согласно любезному обѣщанію г. секретаря Общества, краткіе протоколы его засѣданій будутъ также помѣщаемы въ нашемъ „Вѣстникѣ“.

Русское Астрономическое Общество, уставъ котораго уже утвержденъ, въ непродолжительномъ времени открываетъ свою дѣятельность.

ЗАДАЧИ.

№ 124. Опредѣлить x изъ уравненія

$$\sqrt[3]{76+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{76-\sqrt{x}}=8.$$

(Заимств.) *Н. Карпозъ* (Златополь).

№ 125. Вершины равносторонняго треугольника ABC лежатъ на трехъ параллельныхъ прямыхъ L, M и N; разстояніе между L и M равно m, а разстояніе между M и N равно n. Вычислить стороны треугольника. *Н. Николаевъ* (Пенза).

---

*) Всѣхъ дѣйств. членовъ „Секціи Физ.-Мат. Наукъ Каз. Общ. Ест.“ въ іюлѣ 1890 г. состояло 182.

**) Подробнѣе объ этомъ см. отчетъ о 3-мъ очер. засѣданіи Каз. Физ.-Мат. Общ. въ № 104 „Вѣстника“ стр. 155.

№ 126. Въ треугольникѣ ABC проведена сѣкущая, пересѣкающая стороны AC и BC соотвѣтственно въ точкахъ M и P, такъ что MP=AM+BP. Показать, что всѣ удовлетворяющія этому условію сѣкущія будутъ касаться окружности постояннаго центра и радіуса.

Н. Николаевъ (Пенза).

№ 127. На сторонѣ BC даннаго угла ABC даны точки D и E. Провести въ данномъ направленіи отрѣзокъ XY (точка X находится на сторонѣ AB и Y—на BC) такъ, чтобы углы DXY и EXY были равны.

И. Александровъ (Тамбовъ).

№ 128. Построить прямую, разстоянія которой отъ вершинъ A, B, C треугольника ABC пропорціональны соотвѣтственно сторонамъ BC, CA, AB.

П. Свѣшниковъ (Троицкъ).

№ 129. Показать, что разстояніе центра тяжести усѣченной пирамиды отъ верхняго и нижняго основаній относятся какъ

$$(3B+2\sqrt{Bb}+b):(B+2\sqrt{Bb}+3b)$$

гдѣ черезъ b и B обозначены площади этихъ основаній.

П. Свѣшниковъ (Троицкъ).

№ 130. Тригонометрическимъ путемъ *) найти зависимость между сторонами и діагоналями плоскаго или сферическаго четыреугольника.

Показать, что для плоскаго четыреугольника эта зависимость можетъ быть представлена въ видѣ:

$$\begin{vmatrix} 2a^2 & a^2+e^2-b^2 & a^2+d^2-f^2 \\ a^2+c^2\quad b^2 & 2e^2 & e^2+d^2-c^2 \\ a^2+d^2-f^2 & e^2+d^2-c^2 & 2d^2 \end{vmatrix}=0$$

гдѣ a, b, c, d—послѣдовательныя стороны а e и f—діагонали четыреугольника.

Примѣнить найденную зависимость къ разнымъ частнымъ случаямъ.

М. Попруженко (Оренбургъ).

Упражненія для учениковъ.

1. ABCD—квадратъ; прямая MN лежитъ своими концами на двухъ параллельныхъ сторонахъ его ($\overline{AMB}$, $\overline{CND}$); вторая прямая PQ перпендикулярна первой ($\overline{DPA}$, $\overline{BQC}$). Доказать что MN=PQ.

2. MN и PQ—два равные и перпендикулярные отрѣзка; черезъ

*) Геометрическій методъ извѣстенъ и сложнѣе тригонометрическаго.

концы перваго проведены параллельныя прямыя, черезъ концы второго—прямыя перпендикулярныя первымъ. Доказать, что построенная фигура—квадратъ.

3. Справедливы-ли доказанныя предложенія (прямое и обратное) и для того случая, когда оба отрѣзка MN, PQ, или одинъ изъ нихъ, лежатъ своими концами на продолженіяхъ сторонъ взятаго квадрата?

4. Даны четыре точки: 1, 2, 3. 4. Построить квадратъ, стороны котораго проходили бы чрезъ данныя точки.

Намекъ. Соедините, напр., 1 и 3; изъ 2 проведите отрѣзокъ перпендикулярный и равный 1, 3: получите точку 5; точки: 5, 4 принадлежатъ сторонѣ квадрата; довершите построеніе.

5. Опредѣлите число рѣшеній, которое имѣетъ предложенная задача и разберите тотъ частный случай, когда точки: 1, 2, 3, 4 лежатъ на прямой.

6. Дана симметричная трапеція, діагонали которой перпендикулярны; черезъ концы одной изъ діагоналей проведены параллельныя прямыя; чрезъ концы второй—прямыя перпендикулярныя первымъ. Опредѣлить видъ описанной фигуры. *А. Гольденбергъ* (Спб.).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 290. Три силы представлены по величинѣ и направленію отрѣзками MA, MB, MC; доказать, что:

1) равнодѣйствующая ихъ пройдетъ черезъ центръ тяжести G треугольника ABC, образованнаго соединеніемъ концовъ данныхъ силъ и

2) будетъ равна 3MG;

3) въ случаѣ же, если конецъ равнодѣйствующей R лежитъ на описанной около треугольника ABC окружности, точка M должна находиться на окружности девяти точекъ.

Построивъ параллелограммъ MBQC, найдемъ MQ—равнодѣйствующую силъ MB и MC; построивъ параллелограммъ AMQR, найдемъ MR—равнодѣйствующую силъ MA, MB и MC. MQ и CB, какъ діагонали параллелограмма взаимно дѣлятся пополамъ въ D, поэтому AD—медіана стороны BC въ $\triangle$ ABC. Пусть G—точка пересѣченія AD съ MR. Тогда $\triangle GAR \backsim \triangle GDM$ и слѣдовательно $\frac{AG}{GD}=\frac{RG}{GM}=\frac{AR}{MD}=2$, ибо $AR=$ $=MQ=2MD$. Отсюда слѣдуетъ

1) G есть центръ тяжести треугольника ABC (точка G отсѣкаетъ $DG=\frac{1}{3}$ медіаны AD), и

2) $MR=3MG$.

Положимъ теперь, что конецъ R равнодѣйствующей силъ MA, MB, MC лежитъ на окружности круга O, описаннаго около треугольника ABC. Соединяемъ O съ ортоцентромъ H $\triangle$-ка ABC, дѣлимъ OH пополамъ въ

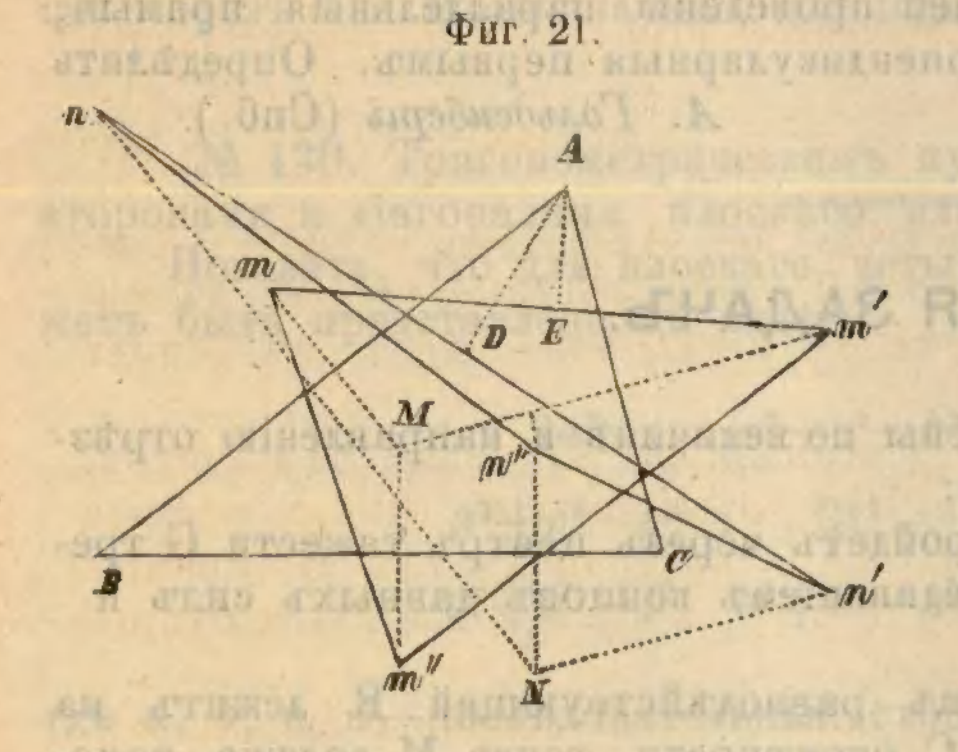
O′, точка O′, какъ извѣстно, будетъ центромъ круга девяти точекъ, кромѣ того извѣстно, что центръ тяжести G △-ка ABC лежитъ на OH такъ, что $OG = \frac{1}{3}OH$; соединяемъ M съ O′ и R съ O; △-ки MO′G и ROG—подобны, такъ какъ $\angle MGO' = \angle RGO$, $GR = 2MG$ и $OG = 2O'G$ ($OG = \frac{1}{3}OH$, а $OO' = \frac{1}{2}OH$, откуда $OG:OO' = 2:3$, т. е. OG составляетъ $\frac{2}{3}OO'$); изъ подобія этихъ треугольниковъ слѣдуетъ, что $OR:O'M = RG:MG = 2$, т. е. O′M въ 2 раза меньше OR, что показываетъ что точка M лежитъ на окружности круга девяти точекъ, такъ какъ радіусъ ея въ 2 раза меньше радіуса круга описаннаго около треугольника.

А. Бобятинскій (Барнаулъ), *П. Свѣшниковъ* (Троицкъ), *С. Шатуновскій* (?), *С. Блажко* (Москва), *А. Плетневъ* и *Н. Волковъ* (Спб.), *И. С.* (?).

№ 315. Построить треугольникъ, когда извѣстно положеніе *изображеній* въ его сторонахъ нѣкоторыхъ двухъ точекъ M и N. Всегда ли задача возможна?

Предположимъ, что задача рѣшена и △-къ ABC (фиг. 21) искомый. Соединимъ изображенія точекъ M и N, тогда получимъ два △-ка $mm'm''$ и $nn'n''$. Въ △-кѣ mMm' стороны искомаго △-ка ABC—BA и CA проходятъ черезъ средины сторонъ Mm и Mm' перпендикулярно къ нимъ, слѣд. въ пересѣченіи A опредѣляютъ центръ описанной окружности; равнымъ образомъ и въ △-кѣ nNn' вершина A будетъ центромъ описанной окружности, слѣдовательно для полученія вершины A, надо изъ середины стороны nn' △-ка nNn' и изъ середины стороны mm' △-ка mMm' возставить перпендикуляры DA и EA, которые въ пересѣченіи дадутъ одну вершину △-ка ABC. Сдѣлавъ подобныя построенія въ △-кахъ mMm'', nNn'' и $m''Mm'$, $n''Nn'$, получимъ двѣ остальныя вершины. Задача имѣетъ, слѣдовательно одно рѣшеніе. Она возможна когда перпендикуляры DA и EA пересѣкутся, если же они совпадутъ, тогда надо соединить m съ n' и m' съ n, въ пересѣченіи получимъ вершину A, только при такомъ условіи если, фигура $mm'nn'$ будетъ равнобочная трапеція, иначе не будетъ удовлетворена симметрія предмета относительно изображенія и задача будетъ невозможна.

Фиг. 21.



П. Свѣшниковъ (Троицкъ), *С. Шатуновскій* (?), *А. Бобятинскій* (Барнаулъ).

№ 360. Показать, какъ находится построеніемъ длина прямой x, удовлетворяющей условію

$$\frac{n}{x^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \ldots\ldots + \frac{1}{k^2},$$

гдѣ a, b, c,......k суть данные отрѣзки, а n - ихъ число.

Если обозначимъ буквою h высоту прямоугольнаго $\triangle$-ка, катетами котораго служатъ отрѣзки a и b, то

$$ab = h\sqrt{a^2 + b^2},$$

откуда

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

Слѣдовательно данная для построенія формула постепенно приведется къ виду

$$\frac{n}{x^2} = \frac{1}{\text{H}^2}.$$

и

$$x = \sqrt{n\text{H}.\text{H}},$$

что легко построить при всякомъ раціональномъ n.

В. Соллертинскій (Гатчино), *П. Свѣшниковъ* (Троицкъ), *Н. Волковъ* (Спб.), *Н. Паатовъ* (Спб.).

№ 399. На сторонѣ AB треугольника ABC дана точка S. Требуется провести прямую параллельно AB такъ, чтобы часть ея, заключенная между сторонами треугольника AC и BC, была видна изъ S подъ прямымъ угломъ.

Положимъ, что окружность O, описанная на AB, какъ на діаметрѣ, пересѣкаетъ прямую CS въ точкахъ D′ и D. Проведемъ изъ S прямыя SE || OD и SE′ || OD′ до пересѣченія съ CO въ точкахъ E и E′: прямыя MN и M′N′, провеценныя изъ точекъ E и E′ параллельно AB и будутъ искомыя.

Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ CO есть медіана стороны AB, то и

$$\text{EM} = \text{EN}, \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (1)$$

вслѣдствіе-же параллельности ES и OD, EM и OA

$$\frac{\text{ES}}{\text{OD}} = \frac{\text{CE}}{\text{CO}} \text{ и } \frac{\text{ME}}{\text{OA}} = \frac{\text{CE}}{\text{CO}},$$

откуда

$$\frac{\text{ES}}{\text{OD}} = \frac{\text{EM}}{\text{OA}},$$

а такъ какъ OD=OA, то и

$$\text{ES} = \text{EM} \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (2)$$

Изъ (1) и (2) заключаемъ, что окружность E, описанная на MN, какъ на діаметрѣ пройдетъ черезъ S, и слѣдовательно $\angle MSN=d$.

Подобнымъ образомъ доказывается, что $\angle M'SN'=d$.

Н. Шимковичъ (Харьковъ), *В. Соллертинскій* (Гатчино). Ученики: Вор. к. к. (6) *Г. У.*, (?) *Н. В.*, Курск. г. (7) *Н. К.* и *Т. Ш.*, (6) *К. П.* и *В. Х.*, (5) *А. Ш.*, Кременч. р. уч. (5) *I. Т.*, Спб. 1-й г. (7) *А. К.*, Ров. р. уч. (7) *М. С.*, Кам.-Под. г. (8) *А. Р.*, и ? гимн. (5) *И. Л.*

№ 460. Опредѣлить сумму n членовъ ряда

$$\frac{a+1}{2}+\frac{a+3}{4}+\frac{a+7}{8}+\frac{a+15}{16}+\ldots\ldots+\frac{a+2^n-1}{2^n}.$$

Рядъ

$$\frac{a+1}{2}+\frac{a+3}{4}+\frac{a+7}{8}+\frac{a+15}{16}+\ldots\ldots+\frac{a+2^n-1}{2^n}$$

можно представить въ такомъ видѣ

$$\frac{a}{2}+1-{}^1/_2+\frac{a}{4}+1-{}^1/_4+\frac{a}{8}+1-{}^1/_8+\frac{a}{16}+1-{}^1/_{16}+\ldots\ldots+\frac{a}{2^n}+1-\frac{1}{2^n}$$

или

$$a\left({}^1/_2+{}^1/_4+{}^1/_8+{}^1/_{16}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right)+n-\left({}^1/_2+{}^1/_4+{}^1/_8+{}^1/_{16}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right)\ldots\ldots(\alpha)$$

но

$${}^1/_2+{}^1/_4+{}^1/_8+{}^1/_{16}+\ldots+\frac{1}{2^n}=\frac{{}^1/_2-\frac{1}{2^n}\cdot{}^1/_2}{1-{}^1/_2}=\frac{2^n-1}{2^n}.$$

Подставляя это въ (α), получимъ

$$S=\frac{(a-1)(2^n-1)}{2^n}+n.$$

Н. Соболевскій (Москва), *А. Р.* (Астрахань), *С. Т...* (Кіевъ) и *Я. Эйлеръ* (Спб.). Ученики: Курск. г. (7) *В. Х.*, Ворон. к. к. (7) *Н. В*, Кам.-Под. г. (7) *Я. М.*, Камыш. р. уч. (7) *А. З.*

Редакторъ-Издатель Э. К. Шпачинскій.

Дозволено цензурою. Кіевъ, 4 Января 1891 г.

Типо-литографія Высочайше утвержд. Товарищества И. Н. Кушнеревъ и К°.